

Фигурные числа

Предыстория

Давным - давно, помогая себе при счете камушками, люди обращали внимание на правильные фигуры, которые можно выложить из камушков. Можно просто класть камушки в ряд: один, два, три. Если класть их в два ряда, чтобы получались прямоугольники, мы обнаружим, что получаются все чётные числа. Можно выкладывать камни в три ряда: получаются числа делящиеся на три.

- ▶ Фигурные числа - это общее название чисел, геометрическое представление которых связано с той или иной геометрической фигурой.

Так же камушки можно складывать и в треугольник. Самый маленький начинается с 1 камушка, увеличивая число камней и размер треугольника, можно заметить, что каждый из них образован суммой, каждое новое слагаемое которой больше на единицу

▶ ЧИСЛА ДРЕВНИМ ГРЕКАМ, А ВМЕСТЕ С НИМИ ПИФАГОРУ И ПИФАГОРЕЙЦАМ МЫСЛИЛИСЬ ЗРИМО, В ВИДЕ КАМЕШКОВ, РАЗЛОЖЕННЫХ НА ПЕСКЕ ИЛИ НА СЧЁТНОЙ ДОСКЕ – АБАКЕ. ПРИ ЭТОЙ ПРИЧИНЕ ГРЕКИ НЕ ЗНАЛИ НУЛЯ, Т.К. ЕГО НЕВОЗМОЖНО БЫЛО «УВИДЕТЬ». НО И ЕДИНИЦА ЕЩЁ НЕ БЫЛА ПОЛНОПРАВНЫМ ЧИСЛОМ, А ПРЕДСТАВЛЯЛАСЬ КАК НЕКИЙ «ЧИСЛОВОЙ АТОМ», ИЗ КОТОРОГО ОБРАЗОВЫВАЛИСЬ ВСЕ ЧИСЛА. ПИФАГОРЕЙЦЫ НАЗЫВАЛИ ЕДИНИЦУ «ГРАНЕЙ ЧИСЛОМ И ЧАСТЯМИ», Т.Е. МЕЖДУ ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ И ДРОБЯМИ, НО В ТОЖЕ ВРЕМЯ ВИДЕЛИ В НЕЙ «СЕМЯ И ВЕЧНЫЙ КОРЕНЬ».



Цели и задачи

Цель: Изучить геометрическое представление различных чисел. Для достижения этой цели мной были поставлены СЛЕДУЮЩИИ ЗАДАЧИ.

Объект исследований

1)Натуральные числа

▶ Задачи

1. Подобрать и изучить литературу по данной теме
2. Рассмотреть различные виды фигурных чисел
3. Изучить практическое применение полученных знаний
4. Сделать выводы из полученных результатов

Глава I

Виды фигурных чисел



Золотая теорема

Всякое натуральное число - либо треугольное, либо сумма двух или трёх треугольных чисел;

Всякое натуральное число - либо квадратное, либо сумма двух, тех или четырёх квадратных чисел;

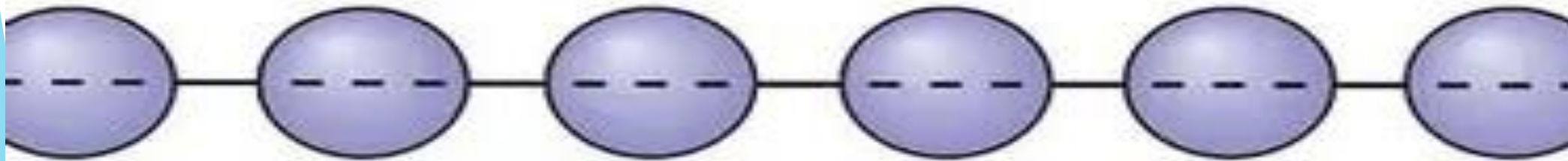
Всякое натуральное число - либо пятиугольное, либо сумма от двух до пяти пятиугольных чисел; и т.д.

Этой теоремой занимались многие выдающиеся математики, полное доказательство сумел дать Коши в 1813 году.



Линейные числа

Линейные числа (простые) - числа, не разлагающиеся на сомножители, то есть их ряд совпадает с рядом простых чисел, дополненным единицей: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,...

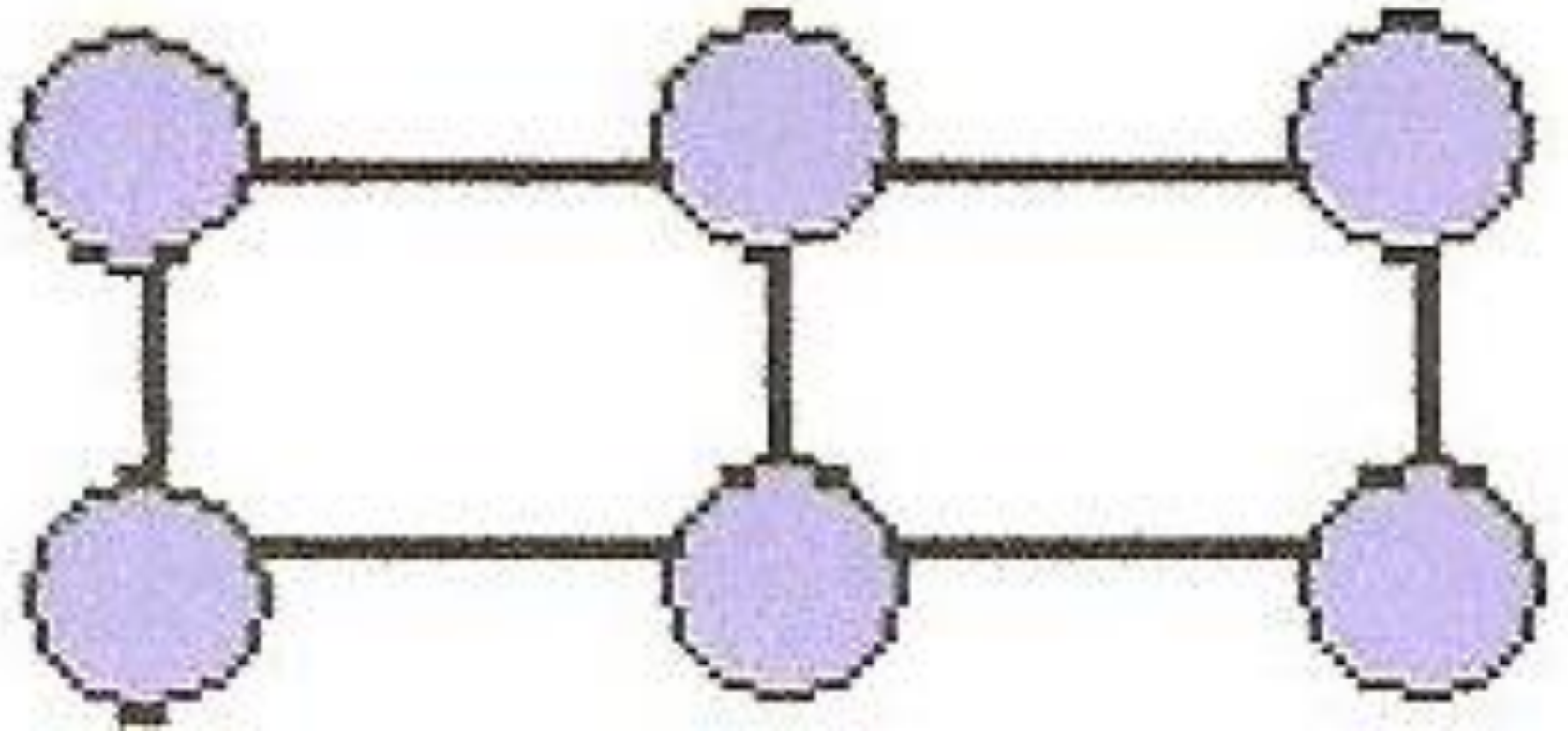


Плоские числа

Плоские числа:

Плоские числа - числа, представимые в виде произведения двух сомножителей, т.е. составные:

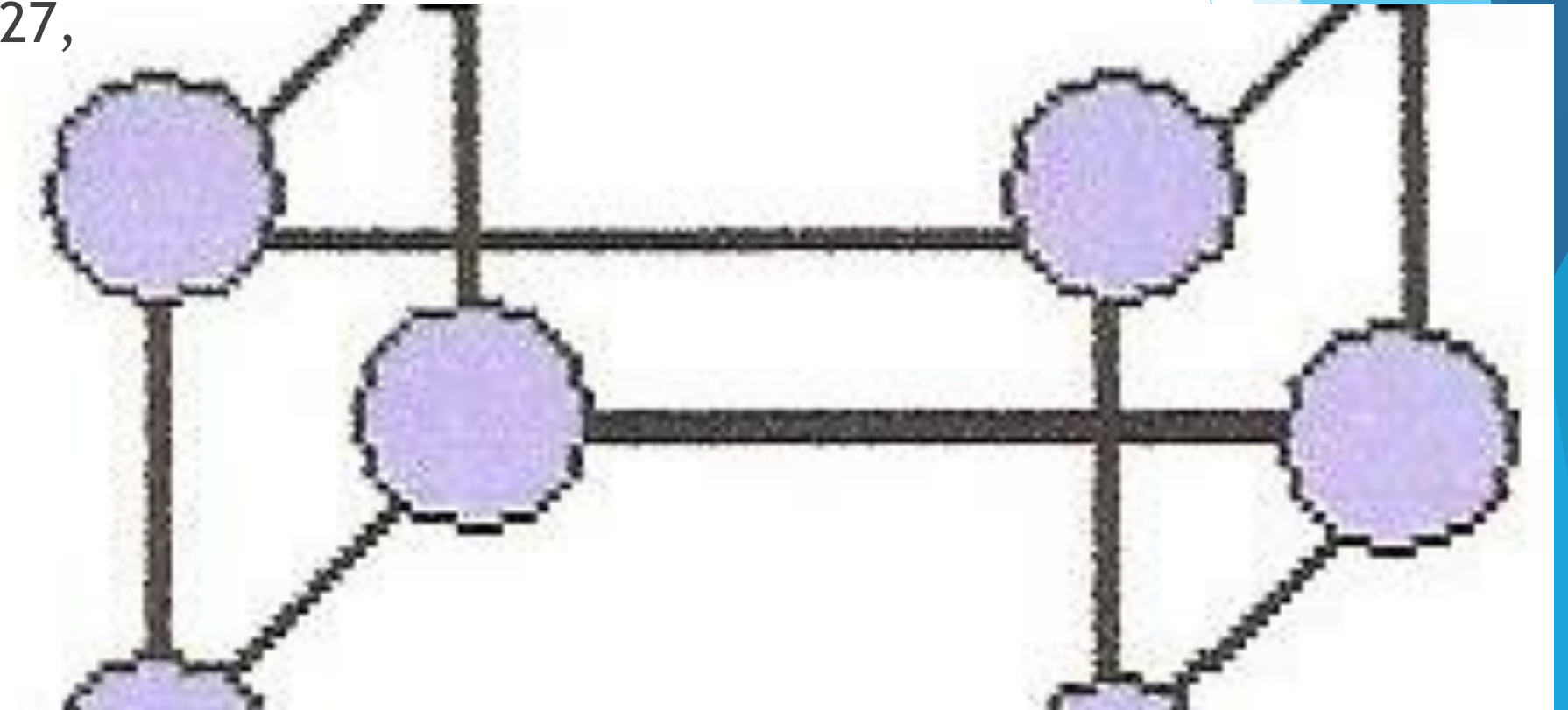
4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15,...



Телесные числа

Телесные числа - числа, представимые произведением трёх сомножителей:

8, 12, 16, 18, 20, 24, 27, 28,...

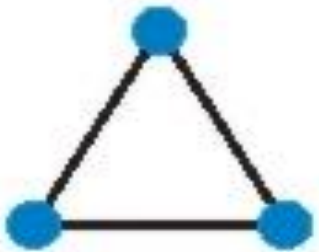


Треугольные числа

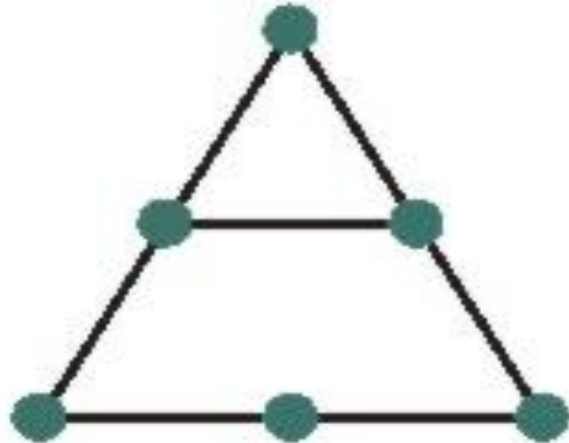
Треугольные числа:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ... , $n(n+1)/2$, ...

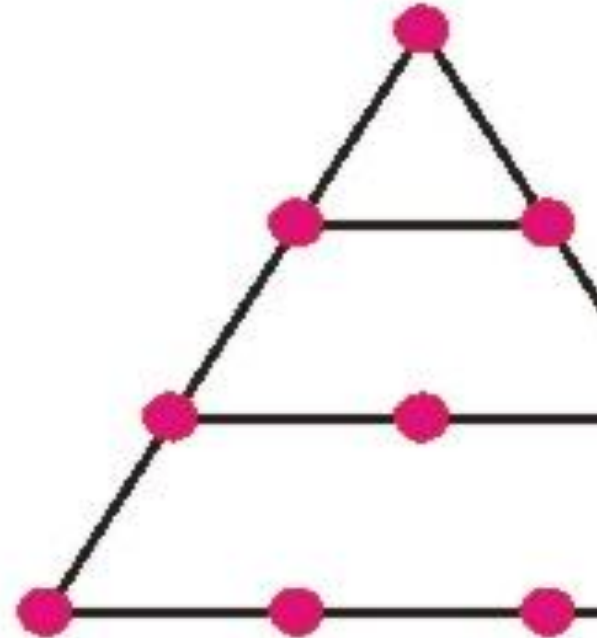
ные числа



$$3 = 1 + 2$$

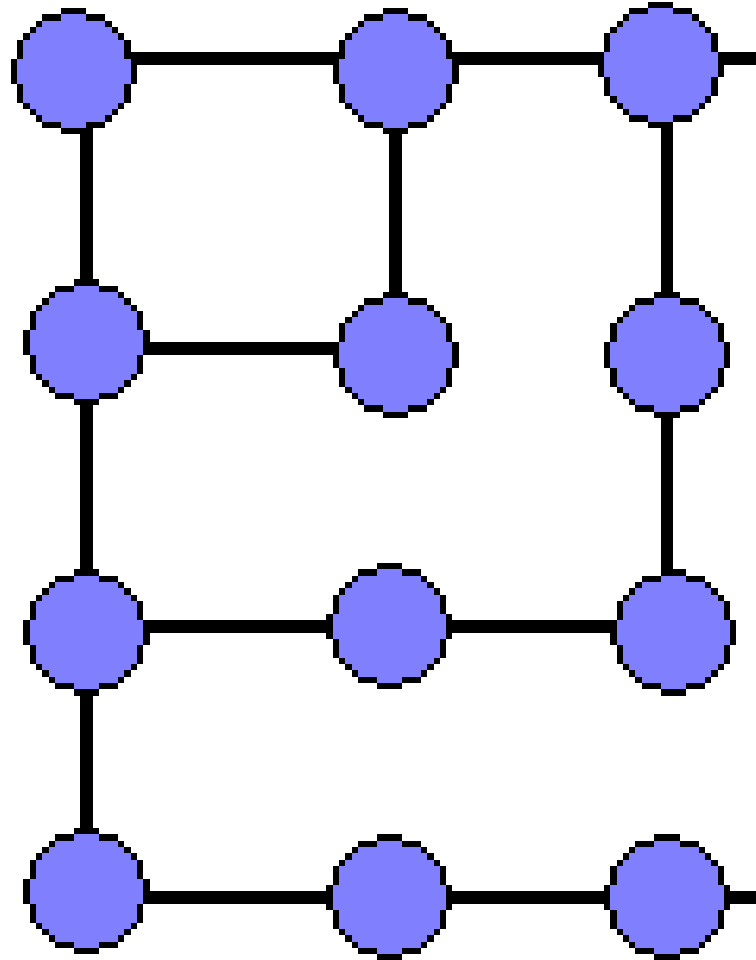
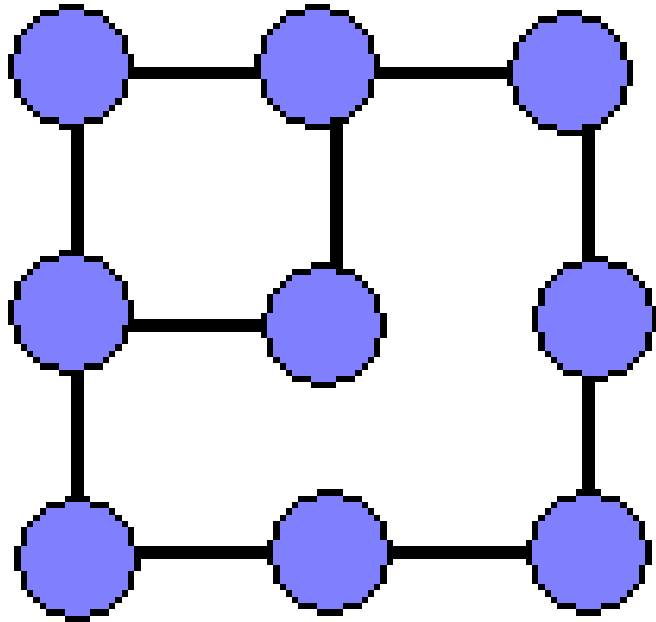
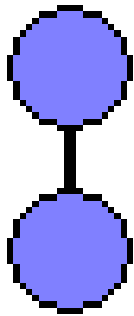


$$6 = 1 + 2 + 3$$



$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

Квадратные числа



Квадратные числа:

Квадратные числа представляют собой произведение двух сомножителей одинаковых чисел, т.е. являются полными квадратами.

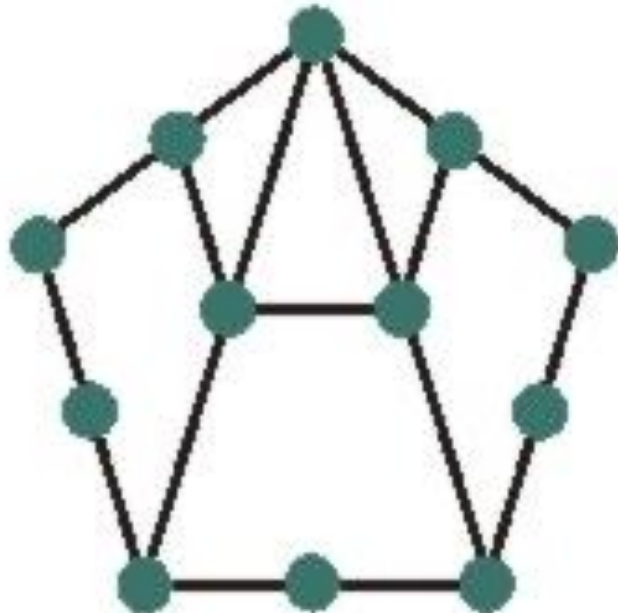
1, 4, 9, 16, 25,
36, 49, 64, 81,
100, ..., n^2 , ...

Пятиугольные числа

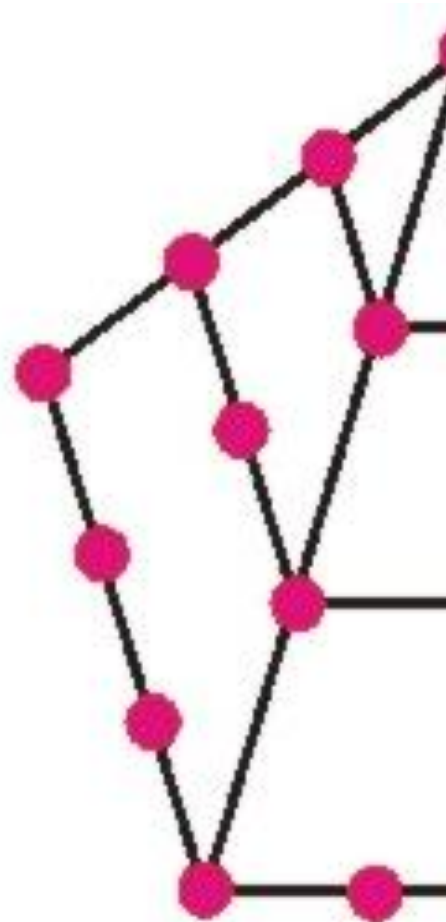
сла



5



12



22

Пятиугольные числа:
1, 5, 12, 22, 35, 51,
70, 92, 117, 145, ..., $n(3n-1)/2, ...$

Глава II

Формы зависимости между фигурными числами



Арифметические законы

1. переместительный закон умножения: $ab=ba$.
2. распределительный закон сложения относительно умножения: $(a+b)c=ac+bc$
3. Сочетательный закон умножения $(a*b)*c=a*(b*c)$
4. Формула для вычисления площади прямоугольника: $S=a*b$



Таблица Николо тартальяна

| | | | | | |
|---|---|----|----|-----|-----|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 |
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 |

Итальянский математик Николо Тартальян в книге «Общий тракт о числе и мере» (1556-1560) рассмотрел прямоугольник в котором верхняя строка и левый столбец состоят из единиц, а каждое оставшееся число равно сумме чисел, расположенных слева и сверху над ним.

Решение математических задач.

Задача 1.

Бильярдные шары уложили в равносторонний треугольник, в котором 24 ряда. Сколько потребовалось бильярдных шаров?

Решение 1:

Рассуждая логически, я предположила, что в первом ряду 1 шар, во втором - 2, в третьем - 3 и так далее до 24 ряда.

Получилась сумма чисел:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24.$$

Выполнив все вычисления получим ответ 300.

Решение 2:

Решая вторым способом я воспользовалась формулой треугольных чисел:

$N = (n+1)/2$, где n - количество рядов.

$$N = 24 * (24+1) / 2 = 24 * 25 / 2 = 300.$$

Задача 2:

Самый яркий пример правильного многоугольника в природе, это пчелиные соты. Они имеют форму правильного шестиугольника. Какое количество правильных шестиугольников можно сложить из камушков и поместить один в другой, при условии, что сторона последующего будет включать в себя одну из сторон предыдущего и длина стороны последнего будет 28.

Решение 2:

Воспользуемся формулой 6-угольных чисел: $N=2*n^2 - n$, где n - количество камней на одной стороне.

$$N=2*28^2-28=2*784-28=1568-28=1540.$$

▶ *Решение 1:*

- ▶ Как и в предыдущем примере, рассмотрим решение данной задачи путем простого перебора всех чисел. Первое число - 1, следующий шестиугольник включает в себя 6 камушков, шестиугольник со стороной 3 будет состоять уже из 12 камней, три из них, но три из этих 12 камней мы взяли от первого многоугольника, а три не вошли в него, поэтому мы прибавляем их. Получается, что на момент, когда у нашего шестиугольника будет сторона 3, мы использовали 15 камней.
- ▶ Рассуждая аналогично получим, что для стороны 4 - 28 камней, стороны 5- 45 камней, стороны 6 - 66 камней, стороны 7 - 91 камень, стороны 8 - 120 камней, стороны 9 - 153 камня и так далее....

Задача 3:

Рассчитать количество пушечных ядер, необходимых для постройки трехгранной пирамиды, в которой n рядов.

Решение 1:

Для решения этой задачи нужно найти сумму столько треугольных чисел, сколько рядов в нашей пирамиде, то есть $1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+\dots$ и так далее. Заметим, что мы написали лишь 10 чисел, значит их сумма будет отражать необходимое количество ядер для десятирядной трехгранной пирамиды, а если таких рядов требуется 50 или 100, или 1000? Очевидно, что данные вычисления требует больших временных затрат.

▶ *Решение 2:*

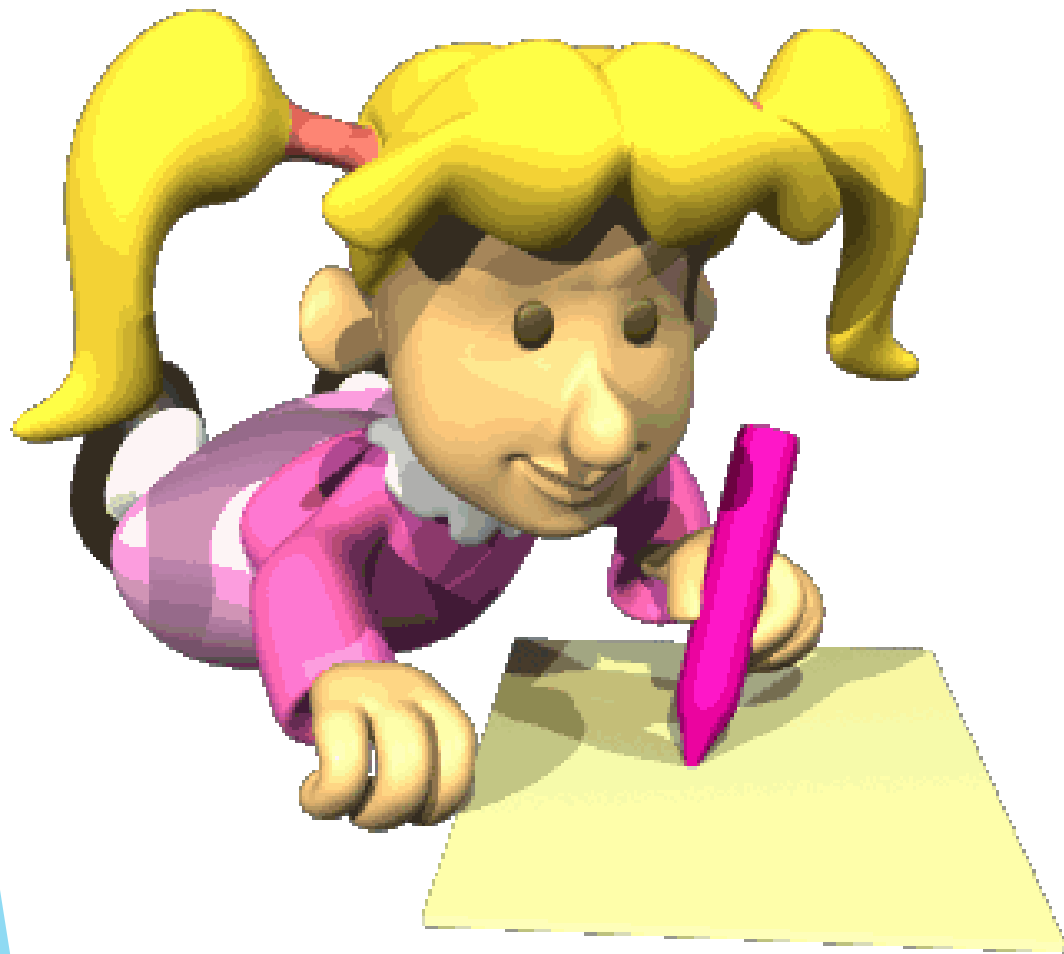
▶ Попробуем воспользоваться формулой и посчитаем необходимое количество ядер для сторядной пирамиды:

▶ $N_n = n \cdot (n+1) \cdot (n+2) / 6$, где n - количество рядов.

▶ $N_{100} = 100 \cdot (100+1) \cdot (100+2) / 6 = 100 \cdot 101 \cdot 102 / 6 = 171700$.

▶ Очевидно, что знание формул, для вычисления фигурных чисел, помогает в решении математических задач, значительно упрощает их и позволяет сделать это быстрее.

ВЫВОД



1. Фигурные числа, действительно, существуют
2. Они выкладываются в виде геометрических фигур.
3. Выделяются несколько видов данных чисел
4. Фигурное представление чисел помогло «открыть» ряд математических законов

Спасибо
за
внимание

